4.5.3. Вивчення флуктуацій потоку природного фону випромінювання

Детальний опис роботи подано в посібниках [5, (робота 33); 10, (робота 27)]. Існує комп'ютерний симулятор цієї роботи [7, робота 3.5].

Метою роботи є дослідження флуктуацій потоку природного фону випромінювання та дослідна перевірка підпорядкованості розподілу Пуассона ймовірності реєстрації різних кількостей частинок, що утворюють цей фон.

Мети роботи досягають реєстрацією числа частинок природного фону випромінювання, що потрапляють на лічильник протягом багатьох однакових інтервалів часу.

Лабораторний експеримент проводиться відповідно до методики, яку детально описано в посібниках [5, 10] з використанням приладу, зображеного на рис. 21.

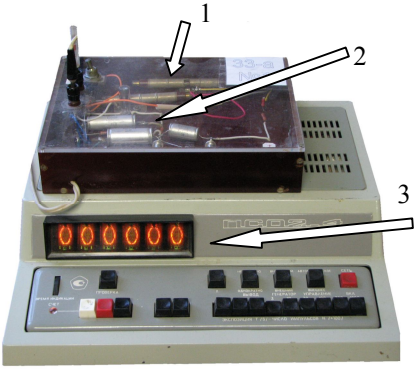

Рисунок 21

Цей прилад складається з лічильника Ґейґера-Мюллера (1), генератора імпульсів (2) і рахункового пристрою (3). Лічильник Ґейґера-Мюллера (1) протягом заданих проміжків часу реєструє частинки, що створюють природний фон випромінювання. За допомогою кнопок перемикання таймера на пристрої (3) встановлюють проміжок часу Δt (зазвичай $\Delta t = 5$ с), протягом якого відбувається реєстрація частинок. Лампочка індикатора на пристрої (3) горить увесь час, протягом якого відбувається підрахунок частинок. По тому вона гасне, і на цифровому табло фіксується число, що дорівнює кількості частинок ΔN, зареєстрованих лічильником Ґейґера-Мюллера за заданий проміжок часу Δt. Через декілька секунд пристрій автоматично ліквідує число на табло та розпочинає новий підрахунок.

Одержані дослідні дані дають змогу вирахувати потік іонізуючих частинок F:

$$F = \frac{\Delta N}{\Delta t}. \qquad (5.3.1)$$

Під час експерименту кількість частинок ΔN, які потрапили на лічильник за заданий проміжок часу Δt вимірюється m разів, причому число m є доволі великим ($m = 150 \div 300$). Унаслідок флуктуацій природного фону випромінювання значення ве-

личин $F_i = \Delta N_i/\Delta t_i$ (i = 1, 2, 3, ..., n) утворюють послідовність *випадкових дискретних величин.*

Експериментально виявлено, що у випадку флуктуацій природного фону випромінення розподіл ймовірності P ($0 \le P \le 1$) появи різних значень F_i в наборі дослідних даних має описувати *функція Пуассона*:

$$P(F_i) = e^{-\mu}\,\frac{\mu^{F_i}}{F_i!}, \qquad (5.3.2)$$

де μ - стала для даного розподілу величина, що має назву *математичного очікування*, знак оклику є усталеним символом функції факторіалу, а саме $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot, \ldots (k-1)\cdot k$. Зауважимо, що 0! = 1.

☝ Зверніть увагу!

У лабораторному експерименті проміжки часу Δt_i є однаковими і невеликими (найчастіше Δt_i = 5 с). Через це, по-перше, вимірювані значення ΔN_i мають бути розподілені так само, як і F_i, й, по-друге, числа ΔN_i є порівняно невеликими й помітно відрізняються між собою.

У лабораторній роботі слід перевірити підпорядкованість дослідних даних розподілу Пуассона. Цей розподіл має вигляд [15 - 17]:

$$P(\Delta N_i) = e^{-\mu}\,\frac{\mu^{\Delta N_i}}{\Delta N_i!}, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (5.3.3)$$

де n - кількість вимірювань, у кожному i-му з яких *за однакові інтервали часу* Δt лічильником зареєстровано певне число ΔN_i частинок природного фону випромінення. У випадку розподілу Пуассона для *конечного числа* m вимірювань *найкращою оцінкою* для математичного очікування μ є середнє арифметичне за всіма числами, що утворюють розглядувану експериментальну вибірку (набір чисел ΔN_i):

$$\mu = \langle \Delta N \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i \Delta N_i}{\sum_{i=1}^{m} m_i}. \qquad (5.3.4)$$

де $\langle \Delta N \rangle$ - середнє число частинок, що реєструє лічильник за обраний інтервал часу Δt, m_i - число вимірювань, у яких зареєстрована кількість ΔN_i частинок, m - число груп вимірювань з однаковими ΔN_i (кожна група містить m_i вимірювань).

☝ Зверніть увагу!

Сума у знаменнику формули (5.3.4) дорівнює загальній кількості n вимірювань протягом експерименту:

$$n = \sum_{i=1}^{m} m_i. \qquad (5.3.5)$$

Експериментальна ймовірність реєстрації ΔN_i частинок в розглядуваному експерименті дорівнює

$$P_{\text{експ}}(\Delta N_i) = \frac{m_i}{n}. \ (i = 1, 2, 3, ..., m) \qquad (5.3.6)$$

Формула (5.3.6) є *першою робочою формулою* роботи.

Зі співвідношень (5.3.3) та (5.3.4) випливає *друга робоча формула* лабораторної роботи для теоретичної ймовірності реєстрації ΔN_i частинок в експерименті:

$$P_{\text{теор}}(\Delta N_i) = e^{-\langle \Delta N_i \rangle} \frac{\langle \Delta N \rangle^{\Delta N_i}}{\Delta N_i\,!}. \ (i = 1, 2, 3, ..., m) \qquad (5.3.7)$$

Графічно розподіл Пуассона $P(\Delta N_i)$ можна зобразити у вигляді гістограми (графіка функції дискретної змінної). Для прикладу на рис. 23 подано таку гістограму при $<\Delta N> = 2{,}6$.

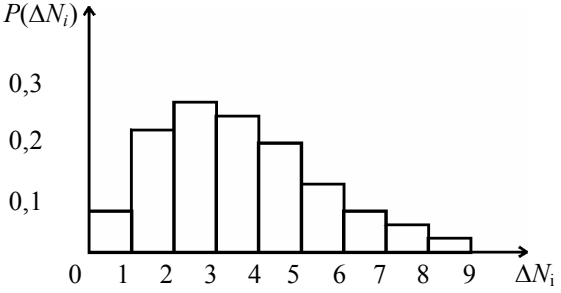

Рисунок 23

Опис процедури вимірювань поданий у посібниках [5, 10].

Результати вимірювань доцільно занотувати у робочому зошиті у вигляді гістограми, яка зображує залежність $m_i(\Delta N_i)$. Рисування цієї гістограми відбувається у такий спосіб:

- Біля нижнього краю окремого аркушу робочого зошита («в клітинку», формат А5) креслять горизонтальну вісь ΔN_i. Масштаб цієї осі – одна клітинка/одна зареєстрована частинка (так само, як на рис. 23).
- На вертикальній осі m_i масштаб дорівнює одна клітинка/один факт реєстрації ΔN_i частинок.
- Дослід виконує група студентів щонайменше з двох осіб. Один зі студентів вголос зчитує покази лічильного приладу, а всі інші ставлять у своїх зошитах хрестики розміром в одну клітинку у вертикальних стовпчиках над відповідною цифрою ΔN_i.

Таким чином по закінченні досліду (через 20 – 25 хв) утворюється гістограма, кожний стовпчик якої містить m_i хрестиків над відповідною кількістю зареєстрованих частинок ΔN_i.

Алгоритм опрацювання результатів експерименту

Для досягнення мети роботи треба порівняти експериментальну гістограму розподілу $P_{\text{експ}}(\Delta N_i)$ (формула 5.3.6) з теоретичною гістограмою $P_{\text{теор}}(\Delta N_i)$ розподілу Пуассона *з математичним очікуванням* $<\Delta N>$*, обчисленим за експериментальними даними* (формула 5.3.7). Обидві гістограми слід будувати на одному аркуші паперу «в клітинку» формату А5 проте різними лініями (наприклад, теоретичний розподіл можна нарисувати ручкою, експериментальний - олівцем).

Результати подальших розрахунків доцільно занотовувати в *горизонтальній* таблиці, яка має такий вигляд (m – максимальне ΔN_i отримане в експерименті, $i = 1, 2, \ldots m$).

Таблиця 1

ΔN_i	0	1	2	…	…	…	m	Нотатки
m_i								$n =$
$P_{\text{експ}}(\Delta N_i)$								
$m_i \Delta N_i$								$<\Delta N> =$
$<\Delta N>^{\Delta N_i}$								$e^{-<\Delta N>} =$
$\Delta N_i!$								
$P_{\text{теор}}(\Delta N_i)$								

1. Полічити кількість m_i хрестиків у кожному стовпчику гістограми $m_i(\Delta N_i)$. Отримані числа занотувати в другий рядок таблиці 1.
2. Додаванням чисел m_i (формула (5.3.5)) відшукати повне число вимірювань n:

$$n = \sum_{i=1}^{m} m_i \ .$$

   Записати його в таблицю 1.
3. Користуючись формулою (5.3.6) обчислити ймовірності $P_{\text{експ}}(\Delta N_i)$. Отримані числа занотувати в третій рядок таблиці 1.
4. Накреслити осі гістограми $P(\Delta N_i)$ та нанести *олівцем* на її площину гістограму $P_{\text{експ}}(\Delta N_i)$.
5. Обчислити добутки $m_i \Delta N_i$ та за формулою (5.3.4) вирахувати середнє число частинок $<\Delta N>$, що реєструє лічильник за інтервал часу Δt. Результати занотувати в таблиці 1.
6. Користуючись формулою (5.3.7), обчислити теоретичні значення ймовірностей $P_{\text{теор}}(\Delta N_i)$. Потрібні для розрахунків величини $e^{-<\Delta N>}$, $<\Delta N>^{\Delta N_i}$ та $\Delta N_i!$ занотовувати в таблиці 1.

7. Нарисувати *ручкою* гістограму $P_{теор}(\Delta N_i)$ в тих самих осях, що й $P_{експ}(\Delta N_i)$.
8. Порівняти гістограми $P_т(\Delta N_i)$ та $P_е(\Delta N_i)$, зробити висновок щодо їхнього *якісного* збігу чи незбігу.

☝ Зверніть увагу!

Подальші обчислення не є обов'язковими. Вони пропоновані для тих студентів, що бажають більше знати та вміти в сфері опрацювання результатів експерименту.

Кількісну оцінку ступеню збігу розподілів $P_т(\Delta N_i)$ та $P_е(\Delta N_i)$ можна отримати з використанням одного з існуючих критеріїв відповідності розподілів, наприклад критерію χ^2. Детальний опис цього критерію подано в книгах [15 - 17].

Алгоритм використання критерію χ^2 у виконуваній лабораторній роботі містить такі етапи.

9. Вирахувати число d ступенів вільності досліджуваного розподілу:

$$d = m - 2, \qquad (5.3.8)$$

де m - число груп вимірювань з однаковими ΔN_i, тобто число стовпчиків на гістограмі $m_i(\Delta N_i)$.

10. Відшукати очікуване число вимірювань G_i за кожного значення ΔN_i (i = 1, 2, 3, ..., m):

$$g_i = nP_{теор}(\Delta N_i). \qquad (5.3.9)$$

11. Числа g_i не можуть бути дуже малими. Для того, щоб подальша процедура була коректною потрібно виконання нерівності

$$G_i \geq 5. \qquad (5.3.10)$$

Якщо цю умову для якогось значення ΔN_i не виконано (зазвичай це дуже малі, або дуже великі значення ΔN_i), треба об'єднувати такий набір даних із сусідніми, доки не виконуватиметься нерівність (5.3.10).

На практиці значно простіше вилучити з розгляду ті значення ΔN_i, для яких не виконується співвідношення (5.3.10). *При цьому зменшиться число m різних значень кількості зареєстрованих часток, отже й число d ступенів вільності досліджуваного розподілу!*

Позначимо m' нову кількість різних значень кількості зареєстрованих часток, тобто кількість стовпчиків на гістограмі $m_i(\Delta N_i)$ після вилучення стовпчиків, що відповідають тим ΔN_i, для яких виконується нерівність (5.3.10). Відповідно позначимо

$$d' = m' - 2. \qquad (5.3.11)$$

12. Повторити дії п.п. 9 – 10 при i = 1, 2, 3, ..., m'.
13. Обчислити величину χ_0^2

$$\chi_0^2 = \frac{1}{d'} \sum_{i=1}^{m'} \frac{(m_i - G_i)^2}{G_i}. \qquad (5.3.12)$$

Величина χ_0^2 є кількісною мірою відповідності дослідного розподілу теоретичному (очікуваному) розподілу Пуассона. А саме:

- якщо $\chi_0^2 \le 1$, то з великою ймовірністю має місце зазначена відповідність,
- якщо $\chi_0^2 >> 1$, то зазначена відповідність малоймовірна.

14. Користуючись таблицею 2 [16], де наведені наближені значення ймовірності $P_{d'}(\chi_0^2)$ відповідності між дослідним розподілом та теоретичним (очікуваним) розподілом Пуассона, відшукати зазначену ймовірність для виконаного досліду. Ймовірність виражено у відсотках. Риски позначають ймовірності менші від 0,05 %. Якщо значення χ_0^2, отримане за формулою (5.3.12) у таблиці відсутнє, застосуйте апроксимацію значень $P_{d'}(\chi_0^2)$, наведених у двох сусідніх стовпчиках, що відповідають значенням χ_0^2 більшим та меншим знайденого.

Таблиця 2

d'	χ_0^2										
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1	100	65	53	44	37	32	26	18	14	11	8,3
2	100	82	67	55	45	37	25	17	11	7,4	5,0
3	100	90	75	61	49	39	24	14	8,6	5,0	2,9
4	100	94	81	66	52	41	23	13	6,6	3,4	1,7
5	100	96	85	70	55	42	22	11	5,1	2,3	1,0
6	100	98	88	73	57	42	21	9,5	4,0	1,6	0,6
7	100	99	90	76	59	43	20	8,2	3,1	1,1	0,4
8	100	99	92	78	60	43	19	7,2	2,4	0,8	0,2
9	100	99	94	80	62	44	18	6,3	1,9	0,5	0,1
10	100	100	95	82	63	44	17	5,5	1,5	0,4	0,1
11	100	100	96	83	64	44	16	4,8	1,2	0,3	0,1
12	100	100	96	84	65	45	16	4,2	0,9	0,2	-
13	100	100	97	86	66	45	15	3,7	0,7	0,1	-
14	100	100	98	87	67	45	14	3,3	06	0,1	-
15	100	100	98	88	68	45	14	2,9	0,5	0,1	-